Référence : « L'enseignement de la Géométrie, par Gustave CHOQUET » publié chez **Hermann**, Paris, en 1964.

Les remarques en italique sont de moi.
Tout le reste est composé de textes de Gustave Choquet, extraits de l'ouvrage cité en référence.

Pourquoi ***<u>les</u>*** *axiomatiques ?*

Parce que Gustave Choquet, dans son livre « l'enseignement de la géométrie » en distinguait plusieurs :
une axiomatique du plan, une autre de l'espace « à trois dimensions », toutes deux euclidiennes (mais, contrairement aux axiomatiques d'Euclide ou de Hilbert, à base vectorielle), une autre encore - toujours euclidienne - à base métrique...
Mais également une axiomatique plus générale (caractérisant des plans soit euclidiens, soit hyperboliques). Et enfin ce qu'il appelait une axiomatique « de la petite géométrie » : en pratique, une axiomatique simplifiée, à l'usage des collégiens (simplifiée, mais bien plus « pure » que celle que j'ai conçue pour «... Donc, d'après... ». À ma décharge, la culture mathématique des collégiens de 1960 était très supérieure à celle des collégiens actuels !)

Je me contenterai de présenter ici ses deux premières axiomatiques (du plan et de l'espace) – puis (en pages 6 et 7) sa « petite géométrie ». Elles sont remarquablement différentes des axiomatiques d'Euclide ou de Hilbert, qui s'appuyaient toutes deux sur le triangle. Celles de Gustave Choquet s'appuient sur le parallélogramme - et le corps des réels - avec la volonté d'introduire le plus rapidement possible les espaces vectoriels.

Axiomes du plan

Schéma d'ensemble

Un plan est un ensemble, noté π, muni d'une structure par la donnée d'un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de π appelées *droites*. Chaque droite est elle-même munie d'une structure que précisent les axiomes, et les structures des diverses droites sont reliées entre elles par d'autres axiomes qu'on pourrait appeler axiomes de passage.

A_0 le plan contient au moins deux droites, et toute droite contient au moins deux points

> *A_0 n'est pas un « vrai » axiome : il n'est pas indépendant, mais une conséquence des axiomes III_a et IV_a.*
> *Gustave Choquet ne l'a énoncé, en une sorte d'introduction à son axiomatique, que pour en faciliter la lecture.*
> *A_0 est donc un « métaxiome » - au sens que j'ai donné à ce mot, dans «... Donc, d'après... ».*

Axiomes d'incidence

I_a pour tout couple (x,y) de points distincts de π, il existe une droite et une seule contenant x et y

I_b pour toute droite D, et pour tout point x, il passe par x une parallèle et une seule à D

Axiomes d'ordre

Structures d'ordre de chaque droite :

II_a A toute droite D sont associés deux structures d'ordre total, opposées l'une de l'autre.

Axiome de passage (relation entre les structures d'ordre des diverses droites) :

II_b pour tout couple (A,B) de droites parallèles
et pour tous points a, b, a', b', tels que $a, a' \in$ A et $b, b' \in$ B,
toute parallèle à ces droites qui rencontre $[a,b]$ rencontre aussi $[a',b']$

Axiomes de structure affine

Structure affine des droites de π :

III_a au plan π est associée une application d de π x π dans $\mathbf{R}_+$, appelée *distance* et telle que :

1. $d(y,x) = d(x,y)$ pour tous $x, y \in \pi$

2. pour toute droite orientée D, tout $x \in$ D, et tout nombre $l \geq 0$,
il existe dans D un point y unique tel que : $x \leq y$ et $d(x,y) = l$

3. $\left(x \in [a,b]\right) \Rightarrow \left(d(a,x) + d(x,b) = d(a,b)\right)$

Structure de groupe additif de (π, O) *(Plan pointé d'origine O, O étant un point de π)*

Axiome de passage

III_b relation entre les structures affines des diverses droites
pour tout couple (A,B) de droites parallèles
et pour tous points a, b, a', b', tels que $a, a' \in$ A et $b, b' \in$ B,
la parallèle à ces droites qui passent par le milieu de (a,b) passe aussi par le milieu de (a',b')

*L'ensemble des axiomes précédents permet à Gustave Choquet d'introduire les translations du plan π, puis, très simplement, la structure d'espace vectoriel de (π, O) sur **R**.*

Axiomes de structure métrique

Axiome des perpendiculaires

IV_a la perpendicularité (notée $\perp$) est une relation binaire sur l'ensemble $\mathscr{D}$ des droites de π, telle que :

1. $(\mathrm{A} \perp \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\mathrm{B} \perp \mathrm{B})$
2. $(\mathrm{A} \perp \mathrm{B}) \Rightarrow$ (A et B ne sont pas parallèles)
3. Pour toute droite A, il existe au moins une droite B telle que $\mathrm{A} \perp \mathrm{B}$
4. Pour tout couple (A,B) tel que $(\mathrm{A} \perp \mathrm{B})$, on a l'équivalence : (B//B') $\Leftrightarrow (\mathrm{A} \perp \mathrm{B}')$

Produit scalaire

Dans la partie « Structure affine des droites de π », Gustave Choquet introduit les droites orientées, puis la mesure algébrique d'un couple de points d'une droite orientée.
Plus tard, il définit une projection orthogonale sur une droite puis,
pour un couple (A_1,A_2) de demi-droites de même origine, le rapport de projection de A_2 sur A_1, qu'il note c(A_1,A_2).

Axiome de symétrie
IV_b pour tout couple (A_1,A_2) de demi-droites de même origine, on a : $c(A_1,A_2) = c(A_2,A_1)$

Axiomes de l'espace à trois dimensions

Schéma d'ensemble

L'espace est un ensemble E muni d'une structure par la donnée d'un ensemble $\mathscr{D}$ de parties de E appelées *droites*,
et d'un ensemble $\mathscr{P}$ de parties de E appelées plans, ces droites et plans étant eux-mêmes munis de structures que précisent les axiomes, et qui sont reliées entre elles par d'autres axiomes.
On supposera que E contient au moins deux plans distincts, que tout plan contient au moins deux droites distinctes, et que toute droite contient au moins deux points distincts.

Définition : on dit que deux droite A,B sont parallèles si, ou bien (A = B),
ou bien A et B sont contenues dans un même plan et ne se rencontrent pas.

Axiomes d'incidence

I_a pour tout couple (x,y) de points distincts de E, il existe une droite et une seule contenant x et y

I_b pour tout plan P, pour toute droite D $\subset$ P, et pour tout point $x \in$ P,
il passe par x une droite de P et une seule qui soit parallèle à D

I_c tout plan qui contient deux points distincts d'une droite la contient en entier

I_d pour tout triplet (x,y,z) de points de E, il existe au moins un plan contenant x,y,z

Axiomes d'ordre

II$_a$ A toute droite D sont associés deux structures d'ordre total, opposées l'une de l'autre.

II$_b$ pour tout couple (A,B) de droites parallèles
et pour tous points a, b, a', b', tels que $a, a' \in$ A et $b, b' \in$ B,
toute parallèle à ces droites qui rencontre $[a,b]$ rencontre aussi $[a',b']$

Axiomes de structure additive

III$_a$ à l'ensemble E est associée une application d de E x E dans $\mathbf{R}_+$, appelée *distance* et telle que :

1. $d(y,x) = d(x,y)$ pour tous $x, y \in$ E

2. pour toute droite orientée D, tout $x \in$ D, et tout nombre $l \geq 0$,
   il existe dans D un point y unique tel que : $x \leq y$ et $d(x,y) = l$

3. $\left(x \in [a,b]\right) \Rightarrow \left(d(a,x) + d(x,b) = d(a,b)\right)$

III$_b$ pour tout couple (A,B) de droites parallèles
et pour tous points a, b, a', b', tels que $a, a' \in$ A et $b, b' \in$ B,
toute parallèle à ces droites qui passe par le milieu de (a,b) passe aussi par le milieu de (a',b')

Axiome des perpendiculaires et de la symétrie

IV$_a$ pour tout plan P, il existe sur l'ensemble des droites de P
une relation binaire dite de relations de perpendicularité et notée $\perp$, telle que :

1. $(A \perp B) \Leftrightarrow (B \perp B)$
2. $(A \perp B) \Rightarrow$ (A et B ne sont pas parallèles)
3. Pour toute droite A de P, il existe au moins une droite B de P telle que $A \perp B$
4. Pour tout couple (A,B) de droites de P tel que $(A \perp B)$,
   on a pour toute droite B' de P l'équivalence : (B//B') $\Leftrightarrow (A \perp B')$

IV$_b$ pour tout couple (A1,A2) de demi-droites de même origine, on a : c(A1,A2) = c(A2,A1)

Axiome de dimension

V pour tout plan P, il existe une partition du complémentaire de P en deux parties non vides E1, E2 telles que $\left(x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\right) \Leftrightarrow \left(P \cap \left[x_1, x_2\right] \neq \varnothing\right)$

Conséquences :

Notons tout de suite que dans chaque plan P de E, les axiomes se réduisent à ceux de la géométrie plane ; on dispose donc dans P de tous les résultats établis antérieurement.

Les axiomes I, II, III, IV caractérisent les espaces affinent les plus généraux munis d'une métrique associée à un produit scalaire. L'axiome de dimension V peut n'être utilisés qu'en fin de développement ; il permet de montrer que la dimension de l'espace est 3.

Axiomatique de la « petite géométrie »

Le texte suivant est intégralement composé d'éléments rédigés par Gustave Choquet, à l'exception de la formulation de l'axiome $\mathbf{II_a}$*' , dont il s'est contenté d'indiquer le principe et dont il m'a bien fallu proposer une rédaction personnelle.*
Par ailleurs, n'ayant pas présenté son axiomatique à base métrique, j'ai été contraint, dans la partie «notions métriques » de restreindre la présentation à l'axiome $\mathbf{IV_b}$*'- et d'ignorer la possibilité des axiomes « d'inégalité triangulaire » et « de pliage ».*

Nous appelons « petite géométrie » celle qu'on enseigne avant l'âge de 14 ans, où l'on n'utilise pas explicitement le langage des vecteurs, et où l'on divise les segments dans des rapports rationnels, mais non dans des rapports quelconques. À cet âge on ne présente pas la géométrie sous forme déductive, mais on donne cependant la démonstration de quelques théorèmes simples à partir de prémisses acceptées par les élèves à cause de leur caractère intuitif ; ces prémisses constituent les axiomes des *petits îlots déductifs* ainsi constitués.

Il est indispensable que les définitions et le langage utilisés lors d'un tel enseignement soient les définitions et le langage qui seront plus tard systématiquement employés.

Il est également souhaitable qu'un fil directeur guide le choix des fragments déductifs ; je pense que ce fil directeur pourrait être constitué par une axiomatique aux axiomes forts mais n'utilisant que des notions simples telles que la notion de congruence.

Pour l'étude des notions affines

Les deux premiers axiomes sont les axiomes I et II ;
mais on traduit l'axiome II en termes de relations « entre » (voir Halsted).

Axiomes d'incidence

$\mathbf{I_a}$ pour tout couple (x,y) de points distincts de π, il existe une droite et une seule contenant x et y

$\mathbf{I_b}$ pour toute droite D, et pour tout point x, il passe par x une parallèle et une seule à D

Axiomes d'ordre

Structures d'ordre de chaque droite :
$\mathbf{II_a}$' pour toute droite D, il existe une relation appelée *entre* telle que, pour tous points $a, b, c \in$ D ,
soit *a* est entre *b* et *c*, soit *b* est entre *a* et *c*, soit *c* est entre *a* et *b* – une seule de ces 3 situations étant vérifiée.

Axiome de passage (relation entre les structures d'ordre des diverses droites) :
$\mathbf{II_b}$ pour tout couple (A,B) de droites parallèles
et pour tous points a, b, a', b', tels que $a, a' \in$ A et $b, b' \in$ B,
toute parallèle à ces droites qui rencontre $[a,b]$ rencontre aussi $[a',b']$

Axiomes de structure affine

L'axiome $\mathbf{III_a}$ (de l'axiomatique du plan) est remplacé par le suivant :

$\mathbf{III_a}$' dans l'ensemble π x π des couples de points de π est définie une relation d'équivalence, notée ~, et telle que :

4. pour tous $x, y \in \pi$, on a $(x,y) \sim (y,x)$

5. pour toute droite D, et tous $x, y, x' \in$ D,
   il existe de part et d'autre de x' un point y' unique de D tel que $(x,y) \sim (x',y')$

6. pour toute droite D, et tous $x, y, z, x, y', z' \in$ D tels que : $x \leq y \leq z$ et $x' \leq y' \leq z'$,
   on a $\left[(x,y)\sim(x',y')\ et\ (y,z)\sim(y',z')\right] \Leftrightarrow \left[(x,z)\sim(x',z')\right]$

Les classes d'équivalence associée à la relation ~ s'appellent *distances* ; on peut les comparer et les ajouter

Structure de groupe additif de (π, O) *(Plan pointé d'origine O, O étant un point de π)*

Axiome de passage

$\mathbf{III_b}$ relation entre les structures affines des diverses droites
pour tout couple (A,B) de droites parallèles
et pour tous points a, b, a', b', tels que $a, a' \in$ A et $b, b' \in$ B,
la parallèle à ces droites qui passent par le milieu de (a,b) passe aussi par le milieu de (a',b')

Ces axiomes permettent d'établir des théorèmes qui montrent que π muni d'une origine est un espace vectoriel sur **Q**.
On pourra donc déduire de ces axiomes tous les résultats élémentaires classiques concernant la structure affinent du plan.

Pour l'étude des notions métriques, on peut conserver l'axiome IV_a, et remplacer IV_b par IV_b', plus fort que IV_b :

Axiomes de structure métrique

Axiome des perpendiculaires

$\mathbf{IV_a}$ la perpendicularité (notée $\perp$) est une relation binaire sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites de π, telle que :

5. $(\mathrm{A} \perp \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\mathrm{B} \perp \mathrm{B})$
6. $(\mathrm{A} \perp \mathrm{B}) \Rightarrow$ (A et B ne sont pas parallèles)
7. Pour toute droite A, il existe au moins une droite B telle que $\mathrm{A} \perp \mathrm{B}$
8. Pour tout couple (A,B) tel que $(\mathrm{A} \perp \mathrm{B})$, on a l'équivalence : (B//B') $\Leftrightarrow (\mathrm{A} \perp \mathrm{B'})$

$\mathbf{IV_b}$' *Soit un triplet (O, x, y) non-aligné quelconque, et soit h la projection de O sur la droite D(x,y) :*
$\left[d(h,x)=d(h,y)\right] \Leftrightarrow \left[d(O,x)=d(O,y)\right]$