Les axiomes de David Hilbert

Référence : réimpression, par **les éditions Jacques Gabay**, d'une édition critique de l'ouvrage « **Les Fondements de la Géométrie, par David HILBERT** » (« **Grundlagen der Geometrie** », traduction par **B.G. Teubner Verlag**), avec introduction et compléments, préparée par Paul **ROSSIER**, professeur honoraire à l'université de Genève et publiée chez **Dunod**, Paris, en 1971, avec le concours du **C.N.R.S**.

*À l'exception des remarques en italique, qui sont de moi, la compilation suivante est composée de textes de **David Hilbert**, extraits de l'ouvrage cité en référence – qui s'appuie sur la 10e édition des « Fondements de la Géométrie » (1968)… avec de nombreuses modifications depuis la 1re (1899).*

Premier groupe d'axiomes : appartenance.

Les axiomes de ce groupe expriment un lien entre les notions de point, de droite et de plan.

(I, 1) Il existe une droite liée à deux points donnés A et B à laquelle appartiennent ces deux points.

(I, 2) Il n'existe pas plus d'une droite à laquelle appartiennent deux points A et B.

Ici comme plus bas, par deux, trois, … points, droites ou plans respectivement,
nous entendons toujours des points, droites ou plans différents.

(I, 3) Sur une droite, il y a au moins deux points ; il existe au moins trois points non-alignés.

(I, 4) Il existe un plan α lié à trois points non-alignés A, B, C auquel appartiennent ces trois points A, B, C.

(I, 5) Il n'existe pas plus d'un plan auquel appartiennent trois points non-alignés A, B, C.

(I, 6) Si deux points A, B d'une droite *a* appartiennent à un plan α tous les points de la droite appartiennent à ce plan α.

(I, 7) Si deux plans α et β ont un point A commun, ils en ont encore au moins un autre B.

(I, 8) Il existe au moins quatre points non coplanaires.

Deuxième groupe d'axiomes : ordre.

Les axiomes de ce groupe définissent le terme « entre » ; si l'on s'appuie sur la relation ainsi déterminée, ils permettent d'établir l'ordre des points alignés, coplanaires ou situés dans l'espace.

(II, 1) Si un point B est entre un point A et un point C, les points A, B C, appartiennent à une droite et B est aussi entre C et A.

(II, 2) Deux points A et C étant donnés, il existe au moins un point B appartenant à la droite AC et tel que C soit entre A et B.

(II, 3) De trois points d'une droite, il n'y en a pas plus d'un qui est entre les deux autres.

En plus de ces axiomes linéaires de l'ordre, nous aurons besoin d'un axiome plan de l'ordre.

(II, 4) Soient A, B et C trois points non-alignés et *a* une droite du plan ABC qui ne passe par aucun des points A, B, C ; si la droite *a* passe par l'un des points du segment AB, elle passe ou par un point du segment BC ou par un point du segment AC.

M. **PASCH**, le premier, a étudié ces axiomes de façon détaillée dans son ouvrage ***Vorlesungen über neuere Geometrie***. L'axiome (II, 4) lui est dû.

Troisième groupe d’axiomes : congruence.

Les axiomes de ce groupe définissent la notion de congruence et, par là, celle de déplacement.

(III, 1) Si A et B sont deux points d'une droite *a* et A’ un point de cette droite ou d'une autre droite *a*’ :
sur *a*’, d'un côté donné de A’, on peut trouver un point B’ tel que le segment AB soit congruent (ou égal) au segment A’B’;
nous écrivons cette relation AB $\equiv$ A’B’.

(III, 2) Si un segment A’B’ et un segment A’’B’’ sont congruents à un même segment AB,
le segment A’B’ est congruent au segment A’’B’’ ;
en bref, si deux segments sont congruents à un troisième, ils sont congruents entre eux.

(III, 3) Soient AB et BC deux segments sans points communs portés par la droite *a* d'une part,
A’B’ et B’C’ deux segments de la droite *a*’ aussi sans points communs ;
si AB $\equiv$ A’B’ et BC $\equiv$ B’C’, alors AC $\equiv$ A’C’.

Le report des angles est traité exactement comme celui des segments.
En plus de la possibilité du report, son univocité doit être posée axiomatiquement ; la transitivité et l’additivité sont démontrables.

Note : avant les énoncés des axiomes suivants, Hilbert définit un angle comme l'ensemble formé de deux demi-droites h et k d'un plan α, issues d'un point O, différentes et appartenant à des droites différentes.
Il désigne cet angle par $\sphericalangle$ (h,k), ou par $\sphericalangle$ (k,h).
Il définit ensuite l'intérieur de l'angle comme la partie convexe de α , limitée par h et k (mais il le dit différemment !)

(III, 4) Soient un angle (h,k) d'un plan α et une droite *a*’ d'un plan α’ ainsi qu'un côté donné de *a*’ de α’.
Désignons par h’ une demi-droite portée par *a*’ issue du point O’.
Dans le plan α’ il existe une unique demi-droite k’ telle que l’angle (h,k) est congruent, ou égal, à l'angle (h’,k’) et dont l'intérieur est du côté donné de la droite *a*’.
En résumé, $\sphericalangle$ (h,k) $\equiv$ $\sphericalangle$ (h’,k’).

Tout angle est congruent à lui-même, autrement dit : $\sphericalangle$ (h,k) $\equiv$ $\sphericalangle$ (h,k) et $\sphericalangle$ (h,k) $\equiv$ $\sphericalangle$ (k,h).

(III, 5) Si dans deux triangles ABC et A’B’C’ les congruences suivantes sont satisfaites :
AB = A’B’ , AC = A’C’ , $\sphericalangle$ BAC $\equiv$ $\sphericalangle$ B’A’C’ , la congruence $\sphericalangle$ ABC $\equiv$ $\sphericalangle$ A’B’C’ l’est aussi.

Quatrième groupe d’axiomes : parallèles.

Note 1: avant l'énoncé de l'axiome suivant, Hilbert démontre que si a est une droite d'un plan α, et A est un point de ce même plan, mais n'appartenant pas à a, il est possible de déterminer dans le plan α une droite qui contient A et qui ne coupe pas a. Il définit alors deux droites parallèles comme deux droites coplanaires qui ne se coupent pas.

Note 2: oui, il n'y a bien qu'un seul axiome dans ce « groupe » !

L’axiome des parallèles a la teneur suivante :

(IV) **Axiome d'Euclide.**
Soient une droite *a* et un point A extérieur à *a* :
dans le plan déterminé par *a* et A, il existe au plus une droite qui passe par A et qui ne coupe pas *a.*
Il résulte de ce qui précède et de l'axiome des parallèles que, par un point extérieur à une droite, il passe une unique parallèle à cette droite.

Cinquième groupe d'axiomes : continuité.

(V, 1) **Axiome de la mesure, ou d'Archimède.**

Si AB et CD sont deux segments quelconques,
il existe un nombre entier n tel que le report du segment CD répété n fois à partir de A sur la demi-droite déterminée par B conduit à un point situé au-delà de B.

(V, 2) **Axiome de l'intégrité linéaire.**

L'ensemble des points d'une droite, soumis aux relations d'ordre et de congruence, n'est susceptible d'aucune extension dans laquelle sont valables les relations précédentes et les propriétés fondamentales d'ordre linéaire et de congruence déduite des axiomes (I) à (III) et de l'axiome (V,1).

Une conséquence essentielle de l'axiome d'intégrité linéaire est le fait général suivant :

Théorème 32 : théorème de l'intégrité.

Les éléments de la géométrie (les points, les droites et plans) constituent un ensemble qui n'est susceptible d'aucune extension si les axiomes d'appartenance, d'ordre, de congruence et l'axiome d'Archimède sont conservés.

Note : l'axiome d'intégrité n'apparaît pas dans la première édition des « fondements de la géométrie ». Hilbert disait de lui :

> « la valeur de cet axiome, au point de vue des principes, tient donc à ce que l'existence de tous les points limites en est une conséquence et que, par suite, cet axiome rend possible la correspondance univoque et réversible des points d'une droite et de tous les nombres réels.
> D'ailleurs, dans le cours des présentes recherches, nous ne nous sommes servis nulle part de cet « axiome d'intégrité ».

*Cet axiome apparaît également sous le nom d'axiome « de complétude », ou axiome de **CANTOR** (ou de **CANTOR - DEDEKIND**) avec un énoncé différent - s'appuyant sur le principe des coupures de **DEDEKIND** - exprimant que toute suite de segments emboîtés dont la longueur « tend vers 0 » converge en un point limite.*

*** *** *** *** *** ***

Permettez-moi de revenir un instant à l'axiomatique que j'ai tenté de construire :

pourquoi l'axiome d'intégrité n'y apparaît-il sous aucune forme ?

Ce n'est à l'évidence pas pour « faire comme Hilbert » (il est un soleil, je suis une bougie) : il ne me semblait toutefois pas avoir sa place dans un ouvrage qui ne fait qu'effleurer, avec beaucoup de retenue, la notion de nombres réels.

Cependant, une fois cet axiome accepté, tous les théorèmes que j'ai démontrés dans le cadre de mesures rationnelles s'étendent très naturellement à des mesures irrationnelles.