Si … alors … **… donc …** **… implique …** **… équivaut à …**

Si … alors …

Je me promène dans un grand bâtiment administratif.
Au premier étage, tous les murs que je vois sont peints en vert : clair, foncé, olive... Des nuances différentes, mais toujours du vert. Quelqu'un m'explique que c'est parce que le ministère de l'environnement occupe cet étage ! Devant mon air dubitatif (c'est un de mes défauts : je doute de tout), il m'affirme : « si, si, je vous assure ! Tous les murs de cet étage sont verts ! Tous, tous ! ! »

<u>De l'affirmation...</u>

Il m'affirme... Pour moi, ce n'est encore qu'une affirmation . Vraie ? Fausse ? Je n'en sais rien.

<u>... À la propriété...</u>

Je vous l'ai dit, je doute de tout. Alors, courageusement, je parcours tous les couloirs, toutes les pièces, tous les cagibis du premier étage... Et c'est VRAI : tous leurs murs sont verts !

En parcourant consciencieusement ce premier étage, je viens d'en vérifier une propriété : une propriété est une affirmation dont on a prouvé qu'elle était vraie.
Propriété : dans ce bâtiment, tous les murs du premier étage sont verts.

(En réalité, je n'ai rien vérifié du tout : peut-être que, juste après mon passage dans une pièce, quelqu'un l'a repeinte en bleu - ou peut-être que les murs sont des écrans géants dont les couleurs varient selon le temps... Bon, ne chicanons pas : considérons que j'ai vérifié la propriété !)

<u>... Au théorème… :</u>

La propriété que je viens de vérifier était : dans ce bâtiment, tous les murs du premier étage sont verts.
Le théorème qu'elle me permet d’énoncer est : dans ce bâtiment, tous les murs du premier étage sont verts.
Comment ? Où est la différence ?... Il n'y en a pas :) !!!

Un théorème est une propriété (c'est-à-dire une affirmation démontrée) qui nous paraît suffisamment importante pour qu'on lui donne ce nom. Et aujourd'hui, je trouve qu'il est important de savoir que les murs du premier étage de ce bâtiment sont tous verts :)

Théorème : dans ce bâtiment, tous les murs du premier étage sont verts.

Mais pour simplifier la présentation d'un raisonnement (constitué d'un enchaînement de théorèmes), on rédige souvent des théorèmes sous la forme : si (conditions) alors (conséquence). Sous cette forme, mon théorème peut devenir :

Théorème : si je suis au premier étage de ce bâtiment, alors les murs que je vois sont verts.

<u>… Et à sa contraposée :</u>

Un verre est-il à moitié plein, ou à moitié vide ? C'est une question d'humeur… Ou de point de vue : si j'ai soif et que j’en aime le contenu, je me réjouirai qu'il soit encore à moitié plein - si je suis obligé de boire une décoction que je déteste, je me plaindrai qu'il ne soit toujours qu’à moitié vide !

C'est également vrai pour les théorèmes, et mon théorème-écolo peut être interprété d'au moins deux façons différentes - l'une positive, l'autre pas.

Interprétation positive : si je suis au premier étage de ce bâtiment, alors les murs que je vois sont verts.

Interprétation négative : si les murs que je vois ne sont pas verts, alors je ne suis pas au premier étage de ce bâtiment. (Pourquoi ? Parce que si j'étais au premier étage, etc... Voir l'interprétation positive !)

Plutôt que de parler de l'interprétation positive et de l'interprétation négative d'un théorème, les logiciens préfèrent parler de la forme directe et de la forme contraposée de ce théorème - ou, plus simplement, d'un théorème et de sa contraposée (voire, parfois du théorème contraposé - bien qu'en réalité il s'agisse toujours du même théorème !)

J'entends une question, là, au fond : « laquelle est la forme directe ? »

Bonne question, ma foi. Je n'ai pas de convictions là-dessus : il me semble que la forme directe, c'est celle à laquelle on a pensé en premier !

Quelques lignes de synthèse.
si A et B sont deux affirmations telles que B soit une conséquence de A, voici quatre variations possibles du même théorème :

	forme directe :	« si A alors B »	et sa forme contraposée :	« si (non B) alors (non A) »
ou	forme directe :	« si (non B) alors (non A) »	et sa forme contraposée :	« si A alors B »

Simple, non ?

<u>Et la réciproque, alors ? ? ?</u>

En mathématiques - comme en français, on a décidé d'appeler « affirmations réciproques » deux affirmations de la forme « si … alors … » dont les contenus sont permutés. Et on l'exprimera de l'une des deux façons suivantes :
« Si A alors B » et « si B alors A » sont deux affirmations réciproques ;
la réciproque de « si A alors B » est « si B alors A » ;

mais quel(s) lien(s) y a-t-il entre deux affirmations réciproques ?
Un lien auditif ou visuel évident : l'impression d'avoir deux affirmations jumelles.
... Mais - et c'est un « mais » fondamental- AUCUN lien logique !

« Si A alors B » peut-être vrai (un théorème !) et « si B alors A » faux (une simple affirmation)... Et c'est le cas le plus général.

Lorsque les deux affirmations sont vraies, il s'agit alors de <u>deux</u> théorèmes, indépendants l'un de l'autre (ils se démontrent différemment). Les mathématiciens disent alors qu'ils ont démontré deux théorèmes réciproques, ou un théorème et son théorème réciproque... Ou, malheureusement, un théorème et SA réciproque : pourquoi malheureusement ? Parce que, par analogie avec les formes contraposées, cette formulation insinue l'idée qu'on observe deux formes d'un seul théorème : le théorème sous sa forme directe, et sa (forme) réciproque. Et ça, c'est une idée... Malheureuse !

L'affirmation réciproque de mon théorème-écolo est :
si les murs que je vois sont verts, alors je suis au premier étage de ce bâtiment.

Et, bien sûr, cette affirmation n'est pas du tout un théorème : pourquoi n'y aurait-il pas au cinquième étage une annexe du ministère de l'environnement ? (Ou le bureau de l'un de mes amis, à qui je rends visite, et qui a décidé qu'il adorait les murs verts !)

Une dernière remarque : deux affirmations réciproques sont deux affirmations dont les contenus sont permutés sans tricher... Sans changer discrètement l'un des contenus en espérant que personne ne le remarquera !
Deux théorèmes ne sont donc pas réciproques si on ne se contente pas, pour passer de l'un à l'autre, de permuter leurs contenus... Si, comme par exemple dans le cas du pseudo « théorème réciproque du théorème de Thalès », on insère sournoisement une condition supplémentaire :)

… donc …

« donc » relie 2 observations et indique que la $2^{ème}$ est une conséquence de la $1^{ère}$:

Théorème : **si** je suis au premier étage de ce bâtiment, **alors** les murs que je vois sont verts.
« donc » : je suis au premier étage de ce bâtiment **donc** les murs que je vois sont verts.

Un théorème est un outil adapté à une situation particulière. « Donc » constate - lorsque c'est le cas ! - que je suis effectivement dans cette situation particulière, et (donc :)) que cet outil fonctionne.

Encore faut-il savoir quel est l'outil dont je me sers. D'où le principe de se référer aux théorèmes dont nous nous servons - soit par leurs noms « propres » lorsqu'ils sont suffisamment connus, soit en les énonçant... Soit, comme dans mon livre, par une numérotation :

... *d1* est perpendiculaire à P et *d* est parallèle à *d1*, **donc, d'après T-47**, *d* est perpendiculaire à P...

D'où, évidemment, le titre de ce livre !

... implique ...

« A donc B » est une version simplifiée - et contraignante - de ce que les logiciens appellent une « implication » .
Juste pour le plaisir, quelques mots sur l'implication, mais je ne m'y attarderai pas :

Son symbole est « $\Longrightarrow$ » (il se lit « implique »).
À ne jamais utiliser comme abréviation pour « donc ». Ca fait hurler tous les logiciens !

L'implication est un lien logique, comme « donc », mais elle est plus générale, car elle n'impose pas de notion de conséquence :

le soleil est une étoile $\Longrightarrow$ *le léopard est un mammifère* <u>est aussi acceptable que</u>: *il pleut* $\Longrightarrow$ *je suis mouillé*

Elle n'impose même pas la véracité de la première affirmation :
la lune est un fruit $\Longrightarrow$ *la terre est bleue comme une orange* (qui a dit que les mathématiciens n'étaient pas des poètes ?)

Enfin, les logiciens parlent également de la contraposée d'une implication:

le léopard n'est pas un mammifère $\Longrightarrow$ *le soleil n'est pas une étoile*
est la contraposée (correcte !) de la première implication de ce paragraphe. Ils sont fous, ces logiciens !

... équivaut à ...

Lorsque deux affirmations sont vraies simultanément - ou fausses simultanément - les mathématiciens disent qu'elles sont équivalentes.
Le symbole qu'ils utilisent alors est « $\Longleftrightarrow$ » (il se lit « équivaut à »)... Et ce n'est pas vraiment surprenant, puisque cela correspond bien à l'idée que ces deux affirmations sont en implication dans les deux sens !

Bien entendu, l'équivalence n'impose pas plus de notion de conséquence que l'implication :

$7 + 2 = 9 \Longleftrightarrow (7+2) +100 = 9 + 100$ mais également : $7 + 2 = 9 \Longleftrightarrow$ la Terre est une planète

ou : $7 + 2 = 5 \Longleftrightarrow$ la Terre est une étoile

Et là non plus, je ne vais pas m'attarder :)

* *

À l'origine de ce texte, une feuille que je distribuais à mes élèves de collège,
et que, si vous le souhaitez, vous pouvez retrouver ici :
http://donc-dapres.com/C43-logique.pdf