



Des degrés aux sinus :

Les Grecs de l'Ecole d'Alexandrie voyaient notre univers à peu près comme dans ce dessin :

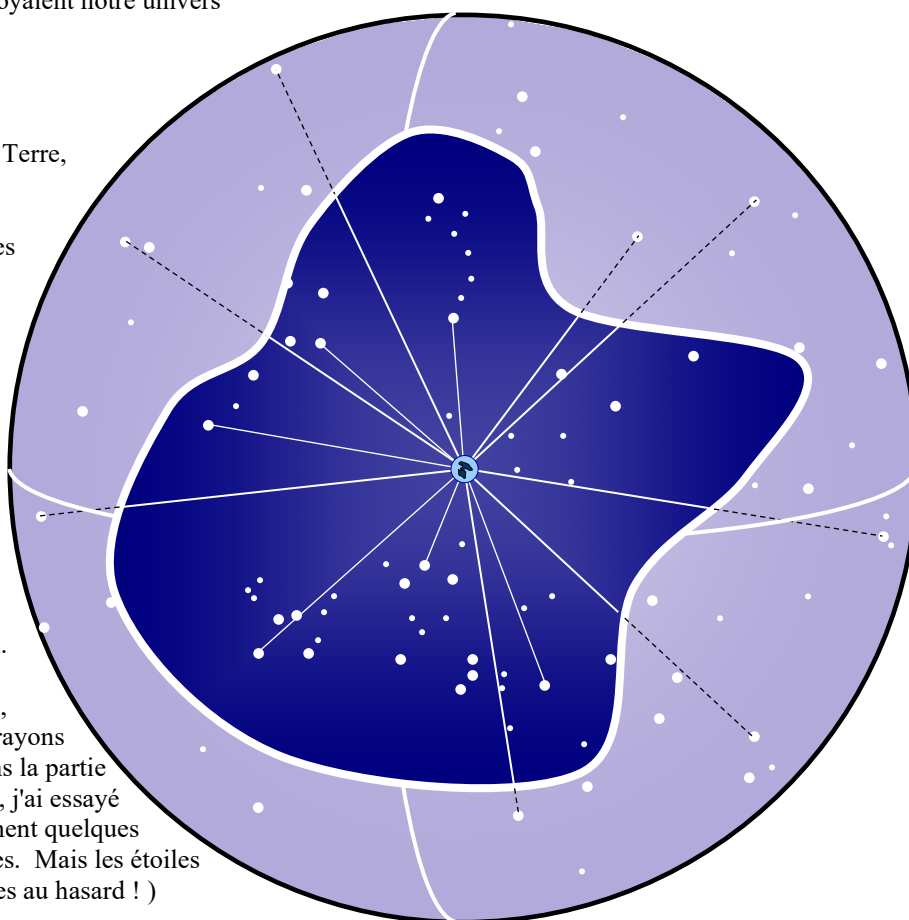
au centre, notre Terre,

et à une même distance de la Terre, toutes les étoiles.

Ces étoiles étaient donc toutes situées sur une sphère, qu'ils appelaient la " sphère des fixes " : chaque étoile y avait une place fixe, et toute la sphère tournait autour de la Terre.

Imagine un instant que tu es Zeus, le Dieu des Dieux, et que tu as momentanément quitté l'Olympe pour un voyage d'inspection hors de l'Univers. Tu vois la " sphère des fixes " de l'extérieur. Et si ton regard cherche la Terre, il perce cette sphère (**), et il voit ceci.

(J'y ai juste rajouté quelques rayons, de la Terre à quelques étoiles: ces rayons ont tous la même longueur ! Et dans la partie intérieure de la " sphère des fixes ", j'ai essayé de représenter à peu près correctement quelques constellations vraiment très connues. Mais les étoiles de la partie extérieure sont dessinées au hasard !)



(**) ... Comme une vulgaire balle de tennis crevée, exactement. Zeus pouvait certainement faire ce genre de choses . Percer la sphère du regard, pas jouer au tennis !

Bien entendu, les Grecs se trompaient. Mais les erreurs, aussi énormes soient-elles, font progresser la connaissance ! Et cette erreur-là est à l'origine de la trigonométrie.

Comment, se demandaient-ils, pourrions-nous déterminer la distance entre 2 étoiles ? En supposant connu le rayon de la sphère des fixes, tout de même (rayon sur lequel ils étaient d'ailleurs loin d'être tous d'accord).

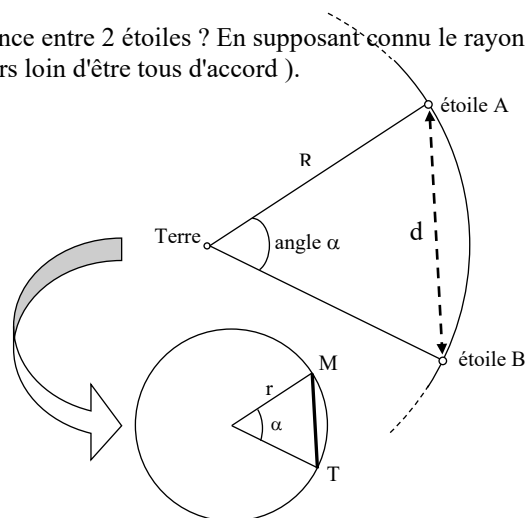
Réponse(s) :

-) de **Hipparque**, il y a presque 22 siècles :

en mesurant l'angle sous lequel on voit les 2 étoiles, en le reportant sur un cercle dessiné sur le sable et de rayon connu, en mesurant la corde interceptée par cet angle, puis en multipliant cette longueur

par le rapport $\frac{\text{rayon de la sphère des fixes}}{\text{rayon du cercle sur le sable}} : d = MT \times \frac{R}{r}$

(C'est ce même Hipparque qui avait déjà inventé les degrés, en séparant un cercle en 360 arcs de même longueur)



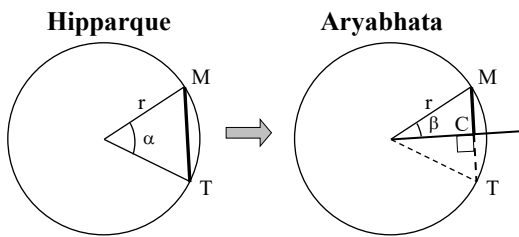
(*) Métrie, de "metron", mesure, en grec. Trigone : " trois angles ", toujours en grec... Est devenu " triangle " en latin. La trigonométrie, c'est l'étude des liens entre mesure des angles et mesure des côtés, dans un triangle (rectangle, mais ce n'est pas précisé !).

Hipparque rédigea une " table des cordes " : ces cordes étaient mesurées sur un cercle de 60 pieds de rayon, pour des angles de 1°, 2°, 3°, ... Une table qui ressemblait à ceci :

angle en degrés	corde en pieds
.....
36°	37,08
37°	38,08
38°	39,07
.....

-) de **Aryabhata**, il y a 15 siècles :

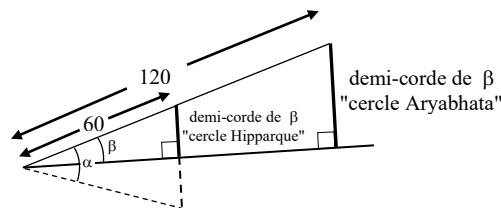
en déterminant plutôt la demi-distance entre les 2 étoiles, à partir de la demi-corde correspondant au demi-angle entre les étoiles : $\beta = \frac{\alpha}{2}$ et $MC = \frac{MT}{2}$



La décision d'Aryabhata lui a permis de passer d'une table des cordes, pour chaque angle de 0 à 180°, à une table des demi-cordes pour des angles de 0 à 90° .

Mais son intérêt majeur est peut-être de débusquer le rôle caché des triangles rectangles dans ce genre de mesure !

Pour ne pas avoir à refaire toutes les mesures, Aryabhata choisit un cercle dont le rayon mesurait 120 pieds :



Sur ce dessin, tu vois que la demi-corde "Aryabhata" de β est 2 fois plus grande que la demi-corde "Hipparque" du même β : (*) elle a donc la même longueur que toute la corde "Hipparque" de α !

(*) Tiens, un bonjour de Thalès ?

table de Hipparque

angle en degrés	corde en pieds
.....
36°	37,08
37°	38,08
38°	39,07
.....

rayon du cercle : 60 pieds

table d'Aryabhata :

demi-angle en degré	demi-corde en pieds
.....
18°	37,08
18,5°	38,08
19°	39,07
.....

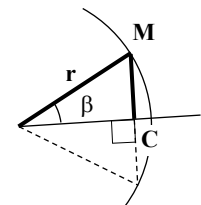
rayon du cercle : 120 pieds

Aucune des tables de Hipparque ne nous est parvenue. Les premières " tables des cordes " sont donc souvent attribuées à Ptolémée (2 siècles plus tard !), ce qui n'est pas très juste. De la même façon, les premières " tables des demi-cordes " sont en général attribuées à Al-Khwarizmi, voire à Al Battani (3 et 4 siècles après Aryabhata, ce qui n'est pas très correct envers lui... Mais n'enlève évidemment rien au génie des 2 grands mathématiciens arabes !)

Le mot " sinus " n'apparaît de toute façon qu'au 16^{ème} siècle (dans une traduction en latin, par Regiomontanus, des travaux de Al Battani), et la "table des sinus ", indépendante du rayon du cercle, est de la même époque.

Pour rendre les " tables de demi-cordes " indépendantes du rayon du cercle, il suffisait de remplacer les longueurs des demi-cordes par les rapports $\frac{\text{longueur de la demi-corde}}{\text{rayon du cercle}}$. Elémentaire, non ?

$$\sin \beta = \frac{MC}{r}$$



Hipparque :	Grec	194 av JC – 120 av JC
Ptolémée :	Grec	85 – 165
Aryabhata	Indien	475 – 550
Al-Khwarizmi	Arabe	780 – 850
Al Battani	Arabe	858 – 929

table de Hipparque

angle en degrés	corde en pieds
.....
36°	37,08
37°	38,08
38°	39,07
.....

rayon du cercle : 60 pieds

table d'Aryabhata :

demi-angle en degré	demi-corde en pieds
.....
18°	37,08
18,5°	38,08
19°	39,07
.....

rayon du cercle : 120 pieds

table des sinus

angle en degré	sinus (simple nombre)
.....
18°	0,309
18,5°	0,317
19°	0,326
.....

... En divisant les demi-cordes par 120